ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP.HCM
TRƯỜNG PHỔ THÔNG NĂNG KHIẾU

ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 NĂM 2014-2015
MÔN THI: TOÁN (Chuyên)
Thời gian: 150 phút

Câu I: Cho phương trình: $\left(m^2+5\right)x^2-2mx-6m=0$ (1) với m là tham số.

a) Tìm m sao cho phương trình (1) có hai nghiệm $x_1;x_2$ phân biệt. Chứng minh rằng: khi đó tổng của hai nghiệm không thể là số dương.

b) Tìm m sao cho phương trình (1) có hai nghiệm $x_1;x_2$ thỏa mãn điều kiện:

$$\left(x_1x_2-\sqrt{x_1+x_2}\right)^4=16$$

Câu II:

1) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2\left(1+x\sqrt{y}\right)^2=9y\sqrt{x} \\ 2\left(1+y\sqrt{x}\right)^2=9x\sqrt{y} \end{cases}$

2) Cho ΔABC vuông tại A với các đường phân giác trong BM, CN. Chứng minh bất đẳng thức:

$$\frac{\left(MC+MA\right)\left(NB+NA\right)}{MA.NA}\geq 3+2\sqrt{2}$$

Câu III: Cho các số nguyên dương a, b, c sao cho: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$

a) Chứng minh $a+b$ không thể là số nguyên tố.

b) Chứng minh rằng $c>1$ thì $a+c$ và $b+c$ không thể đồng thời là số nguyên tố.

Câu IV: Cho điểm C thay đổi trên nửa đường tròn đường kính AB = 2R $\left(C\neq A;C\neq B\right)$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của C lên AB; I, J lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác ACH, BCH. Các đường thẳng CI, CJ cắt AB lần lượt tại M, N.

a) Chứng minh: AN = AC; BM = BC.

b) Chứng minh: bốn điểm M, N, I, J cùng nằm trên một đường tròn và các đường thẳng MJ, NI, CH đồng quy.

c) Tìm giá trị lớn nhất của MN và giá trị lớn nhất của diện tích ΔCMN theo R.

Câu V: Cho 5 số tự nhiên sao cho tổng của ba số bất kỳ trong chúng lớn hơn tổng của hai số còn lại.

a) Chứng minh rằng: tất cả 5 số đã cho đều không nhỏ hơn 5.

b) Tìm tất cả các bộ gồm 5 số thỏa mãn đề bài mà tổng của chúng nhỏ hơn 40.

HẾT

ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP.HCM — ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 NĂM 2014-2015

TRƯỜNG PHỔ THÔNG NĂNG KHIẾU — MÔN THI: TOÁN (Chuyên)

Thời gian: 150 phút

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu I: Cho phương trình: $\left(m^2+5\right)x^2-2mx-6m=0$ (1) với m là tham số.

a) Tìm m sao cho phương trình (1) có hai nghiệm $x_1;x_2$ phân biệt. Chứng minh rằng: khi đó tổng của hai nghiệm không thể là số dương.

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} a=m^2+5\neq 0 \\ \Delta'=m^2+6m\left(m^2+5\right)>0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow m\left(6m^2+m+30\right)>0 \Leftrightarrow m\left[5m^2+\left(m+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{119}{4}\right]>0 \Leftrightarrow m>0$$

Với m > 0 thì pt có hai nghiệm phân biệt. Theo định lý Vi-ét, ta có:

$$\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{2m}{m^2+5} \\ x_1.x_2=\dfrac{-6m}{m^2+5} \end{cases}$$

Do m > 0 nên $0<2m\leq\dfrac{m^2+4}{2} \Rightarrow 0<\dfrac{2m}{m^2+5}\leq\dfrac{m^2+4}{2\left(m^2+5\right)}<\dfrac{m^2+5}{2\left(m^2+5\right)}=\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow 0<x_1+x_2<\dfrac{1}{2} \Rightarrow x_1+x_2$ không thể là số nguyên.

b) Tìm m sao cho phương trình (1) có hai nghiệm $x_1;x_2$ thỏa mãn điều kiện:

$$\left(x_1x_2-\sqrt{x_1+x_2}\right)^4=16$$

Phương trình (1) có hai nghiệm $x_1;x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a=m^2+5\neq 0: \text{luôn đúng} \\ \Delta'\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m\geq 0$

Ta có: $\left(x_1x_2-\sqrt{x_1+x_2}\right)^4=16 \Leftrightarrow \left(-\dfrac{6m}{m^2+5}-\sqrt{\dfrac{2m}{m^2+5}}\right)^4=16 \Leftrightarrow \dfrac{6m}{m^2+5}+\sqrt{\dfrac{2m}{m^2+5}}=2$

$$\Leftrightarrow 3.\frac{2m}{m^2+5}+\sqrt{\frac{2m}{m^2+5}}-2=0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{\frac{2m}{m^2+5}}+1\right)\left(3\sqrt{\frac{2m}{m^2+5}}-2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{\frac{2m}{m^2+5}}-2=0 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{2m}{m^2+5}}=\frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{2m}{m^2+5}=\frac{4}{9} \Leftrightarrow 2m^2+10=9m \Leftrightarrow 2m^2-9m+10=0$$

$$\Leftrightarrow (m-2)(2m-5)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m-2=0 \\ 2m-5=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=2\,(\text{nhận}) \\ m=\dfrac{5}{2}\,(\text{nhận}) \end{array}\right.$$

Vậy khi $m=2;m=\dfrac{5}{2}$ thì pt có 2 nghiệm thỏa đề bài.

- Lưu ý: đặt ẩn phụ $t=\dfrac{2m}{m^2+5}>0$ (do $m>0$) sẽ giúp giải bài toán nhanh hơn.

Câu II:

1) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2\left(1+x\sqrt{y}\right)^2 = 9y\sqrt{x} \\ 2\left(1+y\sqrt{x}\right)^2 = 9x\sqrt{y} \end{cases}$

Điều kiện: $x \ge 0; y \ge 0$. Dễ thấy $x \ne 0; y \ne 0$

Vai trò của x, y như nhau nên không mất tính tổng quát ta giả sử $x \ge y > 0$ (1)

Do đó: $1+x\sqrt{y} = 1+\sqrt{x}.\sqrt{xy} = 1+y\sqrt{x}$

$\Rightarrow 2\left(1+x\sqrt{y}\right)^2 \ge 2\left(1+y\sqrt{x}\right)^2 \Rightarrow 9y\sqrt{x} \ge 9x\sqrt{y} \Rightarrow 9\sqrt{y}.\sqrt{xy} \ge 9\sqrt{x}.\sqrt{xy}$

$\Rightarrow \sqrt{y} \ge \sqrt{x} \Rightarrow y \ge x$ (2)

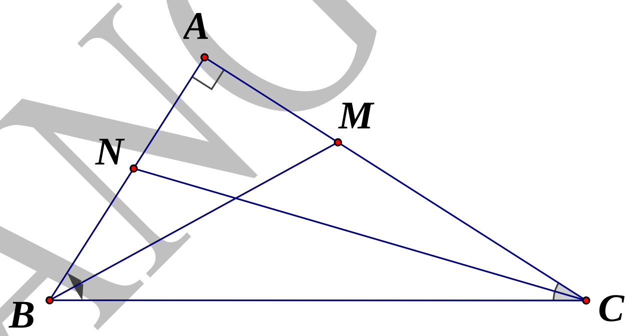
Từ (1) và (2) ta suy ra: $x \ge y \ge x \Rightarrow x = y$.

Khi đó : $2\left(1+x\sqrt{x}\right)^2 = 9x\sqrt{x} \Leftrightarrow 2\left(x^3+2x\sqrt{x}+1\right) = 9x\sqrt{x} \Leftrightarrow 2x^3 - 5x\sqrt{x} + 2 = 0$

$$\Leftrightarrow \left(x\sqrt{x}-2\right)\left(2x\sqrt{x}-1\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\sqrt{x} = 2 \\ 2x\sqrt{x} = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^3 = 4 \\ x^3 = \dfrac{1}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \sqrt[3]{4} \\ x = \sqrt[3]{\dfrac{1}{4}} \end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là : $(x;y) = \left(\sqrt[3]{4};\sqrt[3]{4}\right); \left(\sqrt[3]{\dfrac{1}{4}};\sqrt[3]{\dfrac{1}{4}}\right)$

2) Cho ΔABC vuông tại A với các đường phân giác trong BM, CN. Chứng minh bất đẳng thức: $\dfrac{(MC+MA)(NB+NA)}{MA.NA} \ge 3+2\sqrt{2}$



Ta có: $BC^2 = AB^2 + AC^2$ (Định lý Pytago trong ΔABC vuông tại A)

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương, ta được:

$$\frac{(MC+MA)(NB+NA)}{MA.NA} = \frac{MC+MA}{MA}\cdot\frac{NB+NA}{NA} = \left(\frac{MC}{MA}+1\right)\left(\frac{NB}{NA}+1\right) = \left(\frac{BC}{AB}+1\right)\left(\frac{BC}{AC}+1\right)$$

$$= \frac{BC^2}{AB.AC} + \frac{BC}{AB} + \frac{BC}{AC} + 1 = \frac{AB^2+AC^2}{AB.AC} + 1 + \sqrt{AB^2+AC^2}\left(\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}\right)$$

$$\ge \frac{2AB.AC}{AB.AC} + 1 + \sqrt{2.AB.AC}.2.\sqrt{\frac{1}{AB}\cdot\frac{1}{AC}} = 2+1+2\sqrt{2} = 3+2\sqrt{2}$$

__Câu III:__ Cho các số nguyên dương a, b, c sao cho: $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{c}$

a) Chứng minh $a+b$ không thể là số nguyên tố.

$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{c} \Leftrightarrow \dfrac{a+b}{ab}=\dfrac{1}{c} \Leftrightarrow ab = c(a+b)$. Do đó: $ab \vdots (a+b)$

Nếu a + b là số nguyên tố thì $a \vdots (a+b)$ hoặc $b \vdots (a+b)$

Mà $a, b \in N^*$. Do đó: $a > a+b$ hoặc $b > a+b$ (vô lý)

Vậy a + b không thể là số nguyên tố.

b) Chứng minh rằng $c > 1$ thì $a+c$ và $b+c$ không thể đồng thời là số nguyên tố.

Do vai trò của a, b như nhau. Không mất tính tổng quát ta giả sử $a \geq b$

Xét $a = b$. Ta có: $\frac{2}{a} = \frac{1}{c} \Leftrightarrow a = 2c$. Do đó: $a + c = b + c = 3c, c > 1$. Nên $a+c, b+c$ là các hợp số.

Xét $a > b$. Ta có: $T = (a+c)(b+c) = c(2a+2b+c)$

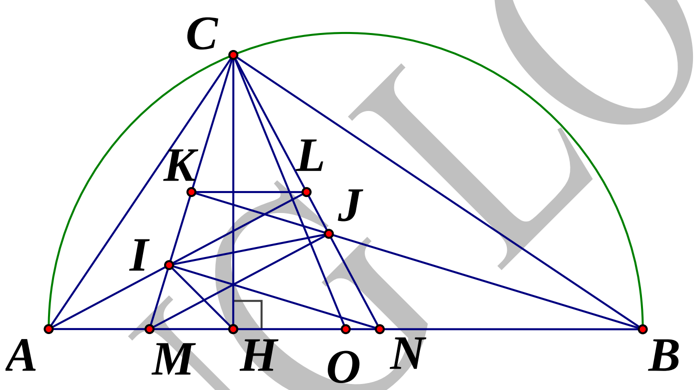
$\Rightarrow$ T có các ước nguyên dương là $1; a+c; b+c, c, 2a+2b+c$

Mà $2a+2b+c > a+c > b+c > c > 1$. Nên T có ít nhất 5 ước nguyên dương.

Do đó: a + c hoặc b + c có ít nhất 3 ước nguyên dương.

Vậy $a+c$ và $b+c$ không thể đồng thời là số nguyên tố.

<u>Câu IV:</u> Cho điểm C thay đổi trên nửa đường tròn đường kính AB = 2R $(C \neq A; C \neq B)$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của C lên AB; I, J lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác ACH, BCH. Các đường thẳng CI, CJ cắt AB lần lượt tại M, N.



a) Chứng minh: AN = AC; BM = BC.

Gọi O là tâm của đường kính AB. Ta có:

$$\begin{cases} ACN + BCN = 90^0 \ (ACB = 90^0; \text{góc nội tiếp chắn nửa đường tròn đường kính AB}) \\ ANC + HCN = 90^0 \ (\Delta HCN \text{ vuông tại H}) \\ BCN = HCN \ (\text{J là tâm của đường tròn nội tiếp } \Delta ACH) \end{cases}$$

$\Rightarrow ACN = ACN \Rightarrow \Delta ANC$ cân tại A $\Rightarrow AN = NC$

Chứng minh tương tự ta cũng có ΔBCM cân tại B $\Rightarrow BM = BC$

b) Chứng minh: bốn điểm M, N, I, J cùng nằm trên một đường tròn và các đường thẳng MJ, NI, CH đồng quy.

ΔACN có AL là đường phân giác nên cũng là đường cao, đường trung tuyến.

$\Rightarrow CL = NL$ và $AL \perp CN$

Tương tự: $CK = MK; BK \perp CM$

Do đó: KL là đường trung bình của ΔCMN $\Rightarrow$ KL // MN $\Rightarrow CKL = CMN$ (1)

Ta có: $IKJ = ILJ = 90^0$ $\Rightarrow$ Tứ giác KLJI nội tiếp. $\Rightarrow CKL = CJI$ (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra: $CJI = CMN (= CKL)$ $\Rightarrow$ Tứ giác MIJN nội tiếp.

$\Rightarrow$ M, N, J, I cũng nằm trên một đường tròn.

Ta có: $\begin{cases} MCN = MCH + NCH = \dfrac{ACH}{2} + \dfrac{BCH}{2} = \dfrac{ACB}{2} = 45^0 \\ MHI = \dfrac{AHC}{2} = 45^0 \end{cases}$

$\Rightarrow MCN = MHI \Rightarrow$ Tứ giác HICN nội tiếp. $\Rightarrow NIC = NHC = 90^0 \Rightarrow NI \perp CM$

Tương tự, ta có: $MJ \perp CN$

ΔCMN có MJ, NI, CH là ba đường cao nên chúng đồng quy.

c) Tìm giá trị lớn nhất của MN và giá trị lớn nhất của diện tích ΔCMN theo R.

Ta có: $MN = AN + BM - AB = AC + BC - AB$

ΔABC vuông tại C $\Rightarrow AC^2 + BC^2 = 4R^2$

ΔABC vuông tại C có CH là đường cao, ta có: $AC.BC = CH.AB$

$CH \le OC = R\left(CH \perp OH\right)$

Vậy $\left(AC + BC\right)^2 = AC^2 + BC^2 + 2AC.BC = AB^2 + 2CH.AB = 4R^2 + 4R.CH$

$\le 4R^2 + 4R^2 = 8R^2 \Rightarrow AC + BC \le 2\sqrt{2}R$

Do đó: $MN \le 2\sqrt{2}R - 2R = 2R\left(\sqrt{2} - 1\right)$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow H \equiv O \Leftrightarrow$ C là điểm chính giữa của cung AB.

$$S_{CMN} = \frac{CH.MN}{2} \le \frac{R.2.R\left(\sqrt{2} - 1\right)}{2} = \left(\sqrt{2} - 1\right)R^2$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow H \equiv O \Leftrightarrow$ C là điểm chính giữa của cung AB.

Vậy giá trị lớn nhất của MN là $2\left(\sqrt{2} - 1\right)R$ và giá trị lớn nhất của ΔCMN là $\left(\sqrt{2} - 1\right)R^2$ khi C là điểm chính giữa của cung AB.

Câu V: **Cho 5 số tự nhiên sao cho tổng của 3 số bất kỳ trong chúng lớn hơn tổng của 2 số còn lại.**

Gọi 5 số tự nhiên phân biệt là: $a_1;a_2;a_3;a_4;a_5$ trong đó $a_5 > a_4 > a_3 > a_2 > a_1 \left(*\right)$

a) Chứng minh rằng: tất cả 5 số đã cho đều không nhỏ hơn 5.

Từ (*) ta có: $a_5 - a_3 \ge 2$ và $a_4 - a_2 \ge 2$. Theo đầu bài, ta có: $a_1 + a_2 + a_3 > a_4 + a_5$

$\Rightarrow a_1 > a_5 - a_3 + a_4 - a_2 \ge 2 + 2 = 4 \Rightarrow a_1 \ge 5$

Vậy $a_5 > a_4 > a_3 > a_2 > a_1 \ge 5$

Như vậy tất cả 5 số đã cho đều không nhỏ hơn 5.

b) Tìm tất cả các bộ gồm 5 số thỏa mãn đề bài mà tổng của chúng nhỏ hơn 40.

Ta có : $a_5 > a_4 > a_3 > a_2 > a_1 \ge 5$ và $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 < 40$

Mà $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \ge a_1 + a_1 + 1 + a_1 + 2 + a_1 + 3 + a_4 + 4 = 5a_1 + 10$

Nên $5a_1 + 10 < 40 \Rightarrow a_1 < 6$

Vậy $5 \le a_1 < 6, a_1 \in N \Rightarrow a_1 = 5$. Nên $a_2 + a_3 + a_4 + a_5 < 35$.

Mặt khác : $a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \ge a_2 + a_2 + 1 + a_2 + 2 + a_3 + 3 = 4a_2 + 6$

Nên $4a_2 + 6 < 35 \Rightarrow a_2 < \dfrac{29}{4} \Rightarrow a_2 \le 7$. Vậy $6 \le a_2 \le 7, a_2 \in N \Rightarrow a_2 = 6; a_2 = 7$

Như vậy có hai bộ gồm 5 số $\left(a_1;a_2;a_3;a_4;a_5\right)$ thỏa mãn đầu bài toán là : $\left(5;6;7;8;9\right);\left(5;7;8;9;10\right)$

HẾT